$\sqrt{f(x)}$

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Algèbre de Boole

1

1 – Préambule

L'algèbre de Boole (du mathématicien britannique George Boole) est une partie des mathématiques qui s'intéresse à la logique. Elle propose des techniques permettant de mettre en relation des variables logiques à l'aide d'opérateurs logiques.

3 – Variable logique, binaire ou booléenne

Une variable logique est une grandeur qui peut prendre 2 états :
VRAI ou la valeur **0** **FAUX** ou valeur **1**

Une variable logique, dite aussi binaire ou booléenne, se note par une lettre, comme en algèbre : a ; b ; x ; etc.

On distingue deux notations différentes : **MAJUSCULE** pour les **sorties** = ordres.
minuscules pour les **entrées** = comptes rendus.

2 – Utilité

Les systèmes à base **d'électronique** et **d'informatique** ont des fonctionnements logiques qui impliquent l'utilisation de l'algèbre de Boole.

Exemple :
Un distributeur automatique de billets de banque ne distribuera la somme demandée que sous certaines conditions : le code secret doit être bon ET le compte à débiter doit être approvisionné en conséquence.
La sortie « distribuer les billets » est bien binaire : il y a distribution ($D = 1$) ou pas ($D = 0$).
Cela est du au fait que les entrées sont binaires :
le code secret de la carte bancaire est bon ($c = 1$) ou pas ($c = 0$) et le compte est approvisionné ($a = 1$) ou pas ($a = 0$).
On remarquera la présence d'un opérateur « ET » entre les variables c et a ; en effet, le fonctionnement attendu du distributeur fait que pour avoir ($D = 1$), il faut avoir ($c = 1$) (le code est bon) *ET* (a = 1) (il y a de l'argent sur le compte) et non pas *OU*.

4 – Fonctions logiques fondamentales

Fonction logique OU (disjonction)

Définition : a OU b est VRAI si et seulement si a est VRAI **OU** b est VRAI.

La fonction est inclusive, c'est-à-dire que a OU b est VRAI également si a est VRAI <u>et</u> b est VRAI.
La fonction peut aussi être exclusive, c'est-à-dire que a OU b est VRAI <u>que</u> si a est VRAI ou b est VRAI.

La fonction XOR n'est pas fondamentale mais composée :

$$a \ XOR \ b = (a+b)\cdot\left(\overline{a\cdot b}\right) = a\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot b$$ *(voir § 5 – Équation logique)*

Notation « OU » inclusif :

$a+b$, $a \vee b$, $a \mid b$, $a \parallel b$, $a \ OR \ b$

Notation « OU » exclusif :

$a \oplus b$, $a \overline{\vee} b$, $a \ XOR \ b$

Fonction logique ET (conjonction)

Définition : a OU b est VRAI si et seulement si a est VRAI **ET** b est VRAI.

Notation « ET » :

$a\cdot b$, $a \wedge b$, $a \& b$, $a \&\& b$, $a \ AND \ b$

Fonction négation

Définition : la négation (ou « complément ») de a est VRAIE si et seulement si a est FAUX.

Notation « NON » :

$\overline{a}$, $!a$, $\neg a$, $non \ a$, $non - a$

5 – Équation logique

Une équation logique exprime une variable dite « **de sortie** » en fonction d'autres variables dites « **d'entrée** ».

Si les variables d'entrée sont logiques, alors la variable de sortie est elle aussi logique et l'algèbre de Boole s'applique.
Dans l'exemple du §2, la distribution de billets D *est la variable de sortie qui dépend de l'état des autres variables* a *et* c *qui sont les variables d'entrée ; comme elles sont logiques,* D *est elle aussi logique.*

L'équation logique est construite sur la base du fonctionnement attendu (que veut-on ?).
Voilà différents cas de fonctionnement possibles ; le premier est bien entendu le plus raisonnable !

La distribution est possible que si :

- ⇒ **[cas 1]** le code est bon ($c = 1$) **ET** si le compte est abondé ($a = 1$) __________ $D = a \cdot c$
- ⇒ **[cas 2]** le code est bon ($c = 1$) __________ $D = c$
- ⇒ **[cas 3]** le code est mauvais ($c = 0$) __________ $D = \overline{c}$
- ⇒ **[cas 4]** le code est mauvais ($c = 0$) **ET** le compte est abondé ($a = 1$) __________ $D = a \cdot \overline{c}$

6 – Table de vérité

Trouver une équation logique peut s'avérer difficile car il faut envisager toutes les combinaisons possible.

Il y en a $N = 2^n$ où n est le nombre de variables d'entrée.
Pour chaque combinaison, il faut dire si la sortie vaut 1 ou 0 (ou X).

On construit alors un tableau appelé **la table de vérité** pour en extraire l'équation sous forme de sommes de produits.

ENTREES		SORTIE
a	c	D
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table de vérité du **[cas 1]**

7 – Propriétés algébriques

- **Associativité :** $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$ $\quad (a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
- **Commutativité :** $a+b = b+a$ $\quad a \cdot b = b \cdot a$
- **Distributivité :** $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\quad a + (b \cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$
- **Idempotence :** $a+a+a+a+\ldots = a$ $\quad a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots = a$
- **Elément neutre :** $a+0 = a$ $\quad a \cdot 1 = a$
- **Absorption :** $a \cdot 0 = 0$ $\quad a+1 = 1$
- **Simplification :** $a + \overline{a} \cdot b = a+b$ $\quad a + a \cdot b = a$ $\quad a \cdot (\overline{a}+b) = a \cdot b$
- **Complémentarité :** $\overline{\overline{a}} = a$ $\quad a + \overline{a} = 1$ $\quad a \cdot \overline{a} = 0$
- **Théorèmes de De Morgan :** $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$ $\quad \overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$